

1.37 空気マイクロメータの整流作用 (第1報)

萩 原 辰 弥

The Rectifying Action of a Pneumatic Micrometer.

(1st Report)

Tatsuya HAGIWARA

Synopsis

A pneumatic micrometer is a kind of transducers which convert the variation of clearance at a measuring nozzle into the pressure difference. As this clearance vibrates, the pressure in the system fluctuates in its manner. When the pressure fluctuation is flattened by a capacity and measured by a pressure gauge with a large damping factor, some amount of pressure deviation is obtained. That is, a pneumatic micrometer has a rectifying effect. Since a pressure deviation is determined by an amplitude of vibration, other conditions being same, this meter can be used as a vibrometer.

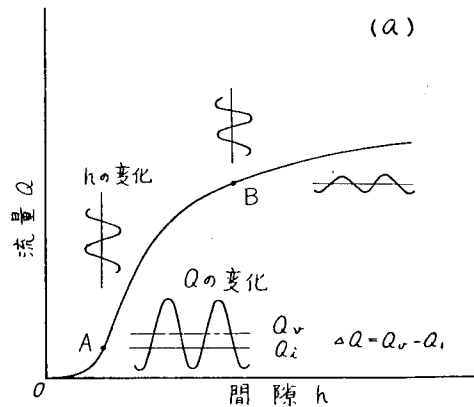
1st report discusses theoretical analysis of the pressures in the system under vibration.

1. 緒 言

空気マイクロメータは測定ノズル部の間隙に対応する空気の流量を測定して間隙の値を求める一種の変換器である。流量を測定するにはロータメータの浮子の位置で、あるいはオリフイス板をおきその背圧を水柱マンオメータの水面の位置でよみとる。いずれの場合も計器のよみの変化は間隙の変化に比べてきわめて大きく、1,000倍ないし、50,000倍程度の感度が得られる。それで空気マイクロメータは永い間精密測定器として広く使われてきた。このような空気マイクロメータは、また整流作用を行うので、その優秀な増巾作用と相まって別の機能を有する計器として開発される。

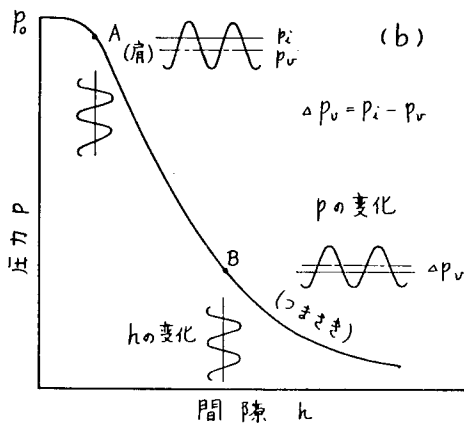
流量 Q と間隙 h との関係は一般に第1図のような曲線であらわされる。いま A 点を中心として間隙を正弦波状に変えると Q は図に示したように変る。 h の変化を次第に速くし容量において Q の変化を平滑にするとある平均流量 Q_v が得られる。振動の中心の間隙値 h_i に対応する流量を Q_i とすると Q_v は Q_i とは異なつた値をとる。 $\Delta Q_v = Q_v - Q_i$ は h の振動

によつて生じたもので、この作用は交流入力に応じて直流出力を発生したのであるから一種の整流作用といふことができる。装置と初期間隙値 h_i がきまつていれば ΔQ_v は a と一義的な関係にあるので、逆に ΔQ_v を測定すれば振巾 a がわかることになる。これが空気式振動計の原理である。第1図のB点についても同様のことがいえる。図から明なようにこの整流作用は空気マイクロメータの静特性によつて変るほか h_i によつても変る。



第1図

背圧型空気マイクロメータは測圧室内の圧力 p を測定して間隙 h を求める計器であるが、 $h-p$ の変換率はきわめて大きい。この形式の計器の静特性は第2図に示すようになる。上



第2図

に述べた流量型計器の場合と全く同様に、間隙を振動させると圧力は図に示すように変動する。この変動圧力は大きな容量をおき応答性のわるい圧力計、たとえば水柱マノメータを用いれば平均圧力 p_v が容易に得られる。 p_v は初期間隙値 h_i に対応する圧力 p_i と異なり $\Delta p_v = p_i - p_v$ が振巾 a に応じて得られた直流圧力分である。

従来の空気マイクロメータは精密測定としてのみ使われており応答性を損うものとして水柱マノメータが難点となつていた。

しかし振巾測定のために用いる場合にはこの点がかえつて利点となつてゐる。背圧型計器では流量の変化を内部絞り（オリフィス板）によつて圧力に変換するので絞りの径が大きな効果をもつだろうことが推察される。

本報告は低圧式背圧型空気式振動計の基本的性能を明かにするために空気マイクロメータの整流特性を研究したものである。

第1報は単独ノズルの空気マイクロメータの間隙を振動させたときに測圧室内の変動圧力の平均圧力と最高最低圧力の理論解析を行つたものである。実験結果との比較、諸要素の影響、あるいは整流効果を高めるための複合ノズル¹⁾の研究などは後に報告する予定である。

2. 変動圧力 p の一般式

本研究で対象とした装置は 低圧式であつて空気源圧力 p_0 を 500 mm Ag (ゲージ) に選んだ。作動する圧力はすべて p_0 と大気圧との間にあるので空気の ρ の値の変化を無視する。すなわち流体は非圧縮性流体と仮定する。装置の作動原理を示す第3図において

$$Q_1 = C_f \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_0 - p)} \quad \dots\dots\dots (1)$$

が成り立つ。 d は内部絞りの孔径であり C_f はその流量係数である。 p は間隙 h の振動に伴つて変動する。 C_f は静的状態で求めた値であり差圧が変動する場合でもそのままの値が用いられるかが問題となるが後に検討する。ここでは瞬間圧力差の平方根は常に瞬間流量に比例するものとする。測定ノズルから大気中に流れ出る空気量 Q_2 についてはつぎのように考える。すなわち Q_2 は常に圧力差 p の n 乗に比例すると仮定した。静的状態で間隙の変化に対応する圧力を p_s , 流量を Q_s とすると

$$Q_s = C_f \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_0 - p_s)}$$

であるからつぎの式が成り立つ。

$$Q_s = C_f \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_0 - p_s)} \left(\frac{p}{p_s} \right)^n \quad \dots\dots\dots (2)$$

微小時間 dt の間に測圧室に流れこむ空気量はさしひき $(Q_1 - Q_2) dt$ でありそのための同室内の空気量の増加 dV は $V_e \frac{dP}{P}$ であるので

$$Q_1 - Q_2 = \frac{V_e}{P} \frac{dP}{dt} \quad \dots\dots\dots (3)$$

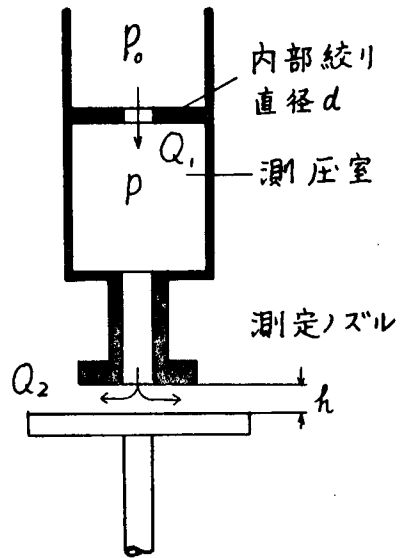
V_e は測圧室の相当容積で P は同室の絶対圧力である。圧力変動が大気圧に比べて小さいので P の値は平均値 P_{mean} が用いられる。 $dP = dp$ であるので (1)・(2) および (3) 式からつぎの式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} q \frac{dp}{dt} &= \sqrt{p_0 - p} - \sqrt{p_0 - p_s} \left(\frac{p}{p_s} \right)^n \\ q &= \frac{4V_e}{\pi C_f d^2} \sqrt{\frac{\rho}{2}} \frac{1}{P_{\text{mean}}} \quad [m \cdot \text{kg}^{-1/2} \cdot \text{sec}] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

q は装置に固有の値であつて応答性をあらわしている。 q が小さいほど応答が速い。

ここで間隙を

$$h = h_i + a \sin \theta \quad \dots\dots\dots (5)$$



第 3 図

に従つて変化させると p_s が変り

$$\frac{\sqrt{p_0 - p_s}}{p_s^n} = f_{(0)} \dots\dots\dots (6)$$

となる。 $f_{(0)}$ は θ の関数で静特性曲線から求められる。静特性は実験によつて求められるが筆者が半従流ノズルの特性式から導いた計算式²⁾によつても得られる。

h を角振動数 ω で振動させると $\theta = \omega t$ とし (4) および (6) 式から

$$q \frac{dp}{dt} = \sqrt{p_0 - p} - f_{(\omega t)} p^n \dots\dots\dots (7)$$

を得る。振動が1サイクルすると p は元の値になる。すなわち $\int_0^T dp = 0$ であるので (7) 式を1サイクルにわたり積分すると

$$\int_0^T \sqrt{p_0 - p} \cdot dt = \int_0^T f_{(\omega t)} \cdot p^n dt \dots\dots\dots (8)$$

となる。 ω を次第に大きくすると p の振巾は次第に減衰し p は一定値 p_c に限りなく近づく。その極限において

$$\frac{\sqrt{p_0 - p_c}}{p_c^n} = \frac{1}{T} \int_0^T f_{(\omega)} \equiv \alpha \dots\dots\dots (9)$$

α は $f_{(0)}$ すなわち静特性から求められる数値であるから n の値がきまれば p_c が計算できる。種々の条件のもとで行なつた実験の結果

$$f_{(0)} = \alpha - \beta \sin \theta - \gamma \cos 2\theta \dots\dots\dots (10)$$

で十分近似できることがわかつた。

$$p = p_c + \epsilon, \quad \frac{\epsilon}{p_c} \text{ or } \frac{\epsilon}{p_0 - p_c} \ll 1 \dots\dots\dots (11)$$

として ϵ の3次の以上を含む項を省略し, (9) および (10) 式の関係を用いて (7) 式を整理すると

$$\begin{aligned} \tau \frac{d\epsilon}{dt} + \epsilon &= (\beta \sin \omega t + \gamma \cos 2\omega t)(A_1 + A_2 \epsilon) \\ &+ [A_3 + A_4(\sin \omega t + \gamma \cos 2\omega t)] \epsilon^2 \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{2p_c \sqrt{p_0 - p_c}}{2n(p_0 - p_c) + p_c} q, \quad A_1 = \frac{2p_c^{n+1} \sqrt{p_0 - p_c}}{2n(p_0 - p_c) + p_c}, \quad A_2 = \frac{n}{p_c} A_1 \\ A_3 &= -\frac{4n(n-1)(p_0 - p_c)^2 + p_c^2}{4p_c(p_0 - p_c)\{2n(p_0 - p_c) + p_c\}}, \quad A_4 = \frac{n(n-1)}{2p_c^2} A_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

ω が大きくなれば ϵ が減少するので (12) 式の近似度はよくなる。(13) 式の各項は n, p_c および q の関数で装置と p_s の変化の様子がきまれば定数となる。(12) 式を ϵ について解けば変動圧力が得られる。

(12) 式の右辺の $A_2 \epsilon$ および $(A_3 + A_4) \epsilon^2$ は A_1 に比べて小さい。最も極端な条件でそれぞれ 1/2 および 1/10 程度である。とくに ω が大きくなればその割合は急激に減少する。そ

れで(12)式を解くにあたって右辺の A_1 の項だけとつて ϵ の第1近似値を求めると、

$$\epsilon_1 = A_1 \{ \beta \cos \varphi_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + \gamma \cos \varphi_2 \cos(2\omega t - \varphi_2) \} \dots\dots(14)$$

ここに

$$\varphi_1 = \tan^{-1} \tau \omega \quad \text{および} \quad \varphi_2 = \tan^{-1} 2 \tau \omega \dots\dots\dots(15)$$

さらに ϵ_1 を(13)式右辺の ϵ の項に代入し ϵ の第2近似値を求めると

$$\epsilon_2 = A_1 \beta W_1 + \frac{1}{2} A_1 A_2 \beta^2 W_2 + \frac{1}{2} A_1^2 A_3 \beta^2 W_3 + \frac{1}{4} A_1^2 A_4 \beta^3 W_4 \dots\dots(16)$$

ここに

$$\begin{aligned} W_1 &= \cos \varphi_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + m \cos \varphi_2 \cos(2\omega t - \varphi_2) \\ W_2 &= \cos \varphi_1 \{ \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \cos(2\omega t - \varphi_1 - \varphi_2) \} + m \{ \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \sin(3\omega t - \varphi_2 - \varphi_3) \\ &\quad + \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 \sin(3\omega t - \varphi_1 - \varphi_3) - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin(\omega t - \varphi_1 - \varphi_2) \\ &\quad - \cos^2 \varphi_1 \sin \omega t \} + m^2 \{ \cos^2 \varphi_2 + \cos \varphi_2 \cos \varphi_4 \cos(4\omega t - \varphi_2 - \varphi_4) \} \\ W_3 &= \cos^2 \varphi_1 \{ 1 - \cos \varphi_2 \cos(2\omega t - 2\varphi_1 - \varphi_2) \} - 2m \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \{ \cos \varphi_1 \sin(\omega t - \varphi_2) \\ &\quad - \cos \varphi_3 \sin(3\omega t - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \} \\ W_4 &= \cos^2 \varphi_1 \{ 2 \cos \varphi_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + \cos_1 \sin(\omega t - 3\varphi_1) - \cos \varphi_3 \sin(3\omega t - 2\varphi_1 - \varphi_3) \} \\ \varphi_3 &= \tan^{-1} 3 \tau \omega, \quad \varphi_4 = \tan^{-1} 4 \tau \omega \quad \text{および} \quad m = \gamma / \beta \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

γ は β に比べてかなり小さいので m は 1 に比べて小さい。(16)式を導くにあたって $W_3 \beta^2 m^2$, $W_4 \beta^3 m$, $W_4 \beta^3 m^2$ および $W_4 \beta^3 m^3$ の各項は値が小さい上係数も小さくなるので省略している。

水柱マノメータは減衰が大きくて応答速度がおそいので ω が増してくると p の平均値 $p_v = p_c + \epsilon_{\text{mean}}$ を指示する。そこで ϵ_2 を(12)式の右辺に入れて1周期につき積分して ϵ の平均値を求めると、

$$\epsilon_{\text{mean}} = \Phi_1 \cos^2 \varphi_1 + \Phi_2 \cos^4 \varphi_1 + \Phi_3 \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \dots\dots\dots(18)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2} A_1 (A_2 + A_1 A_3) \beta^2 \\ \Phi_2 &= \frac{1}{4} A_1^2 (2 A_2 A_4 \beta + A_2 A_3 \beta - 2 A_4 m) \beta^3 \\ \Phi_3 &= \frac{1}{8} A_1^2 (A_2^2 A_3 \beta + 2 A_2 A_4 \beta - 2 A_4 m - 6 (A_2^2 / A_1) m - 10 A_2 A_3 m) \beta^3 \end{aligned} \dots\dots\dots(19)$$

このさい比較的小さい項 A_3 , A_4 および m の2次以上の項と $\frac{1}{8} A_1^2 A_2 A_4 \beta^4 \cos^4 \varphi_1 (\cos^2 \varphi_1 - 1)$ を省略した。 $\omega = 0$, すなわち静的状態では $\cos \varphi = 1$ となるので

$$\bar{p}_s = p_c + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \dots\dots\dots(20)$$

が成立するはずである。ところが解を求めるに ϵ が小さいことその他の仮定による省略を行つたので(20)式は厳密には成立しない。 ω の大きいところでは ϵ は小さくなり、上に設け

た仮定が満足されるので (18) 式で十分に近似できる。そこで、

$$\Phi_3' = \bar{p}_s - (p_c + \Phi_1 + \Phi_2) \dots\dots\dots (20)'$$

を求め Φ_3 を Φ_3' で補正し $\omega = 0$ 附近を近似させる。 Φ_3 を補正するのはこの項が ω の増加に伴い最も速く減衰するからである。

p の変動分 p_ω を求めるには (16) 式の ϵ の第2近似値を (12) 式の右辺の ϵ に代入して ϵ をとき ωt を含む項を求めればよい。 ϵ_{mean} の場合と同様な省略を行うと、

$$\begin{aligned} p_\omega = & A_1 \beta \{ \cos \varphi_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + m \cos \varphi_2 \cos(2\omega t - \varphi_2) \} \\ & - \frac{A_1 A_2}{2} \beta^2 \{ \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cdot \cos(2\omega t - \varphi_1 - \varphi_2) - m \{ \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \cdot \sin(3\omega t - \varphi_2 - \varphi_3) \\ & + \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 \sin(3\omega t - \varphi_1 - \varphi_3) - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin(\omega t - \varphi_1 - \varphi_2) - \cos^2 \varphi_1 \sin \omega t \} \\ & - m^2 \cos \varphi_2 \cdot \cos \varphi_4 \cdot \cos(4\omega t - \varphi_2 - \varphi_4) \} + \dots\dots\dots \end{aligned}$$

4 ωt までの三角関数を含む複雑な式となりその極大極小を求めるには多大の手数がある。しかし p_ω の式中最も支配的な項は $A_1 \beta \cos \varphi_1 \sin(\omega t - \varphi_1)$ であり、ほかの項は ω の増加に伴って急速に減少する。そこで p_ω の極大および極小は $\omega t - \varphi_1 = \pi/2$ および $3\pi/2$ にあるものとして p_ω の極限値を求める。 $\cos^2 \varphi_i - \cos \varphi_{i+1}$ の最大値は $\frac{1}{(2i+1)}$ ($i=1, \dots, 4$) であるのでその係数の小さいものを省略して整理すると、

$$\begin{aligned} (p_\omega)_{\text{ext}} = & \pm [1 + \Psi_1 \cos^2 \varphi_1 + \Psi_2 \cos^2 \varphi_2 + \Psi_3 \cos^2 \varphi_3 + \Psi_4 \cos^4 \varphi_1] A_1 \beta \cos \varphi_1 \\ & + [\Pi_1 \cos^2 \varphi_1 + \Pi_2 \cos^2 \varphi_2 + \Pi_3 \cos^2 \varphi_3 + \Pi_4 \cos^2 \varphi_4 + \Pi_5 \cos^4 \varphi_1 + \Pi_6 \cos^4 \varphi_2 \\ & + \Pi_7 \cos^4 \varphi_4] A_1 \beta \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & -\frac{1}{6} (5A_2 + 3A_1 A_3) \beta m + \frac{1}{24} (9A_2^2 + 4A_1 A_2 A_3 + 4A_1 A_4) \beta^2 \\ \Psi_2 = & \frac{4}{3} A_2 \beta m + \frac{1}{24} A_2 (3A_2 + 16A_1 A_3) \beta^2 \\ \Psi_3 = & -\frac{1}{2} (5A_2 + 3A_1 A_3) \beta m + \frac{1}{6} (3A_2^2 + 10A_1 A_2 A_3 + 2A_1 A_4) \beta^2 \\ \Psi_4 = & -\frac{1}{2} A_1 (A_2 A_3 + A_4) \beta^2 \end{aligned} \left. \dots\dots\dots (22) \right\}$$

および

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & -\frac{2}{3} m + \frac{1}{6} (A_2 - A_1 A_3) \beta + \frac{1}{8} (2A_2^2 + 10A_1 A_2 A_3 + A_1 A_4) \beta^2 m \\ \Pi_2 = & -\frac{1}{3} m + \frac{1}{3} (A_2 + 2A_1 A_3) \beta - \frac{1}{8} (6A_2^2 + 13A_1 A_2 A_3 + A_1 A_4) \beta^2 m \\ \Pi_3 = & -\frac{1}{8} (20A_2^2 + 31A_1 A_2 A_3 + 10A_1 A_4) \beta^2 m \\ \Pi_4 = & -\frac{1}{4} A_2 (8A_2 - 25A_1 A_3) \beta^2 m \\ \Pi_5 = & -\frac{1}{4} (13A_2^2 - 12A_1 A_2 A_3 - 3A_1 A_4) \beta^2 m \\ \Pi_6 = & -\frac{1}{4} (7A_2^2 - 27A_1 A_2 A_3 - A_1 A_4) \beta^2 m \\ \Pi_7 = & -\frac{11}{4} A_2^3 \beta^2 m \end{aligned} \left. \dots\dots\dots (23) \right\}$$

(21) 式右辺第1項の2倍が圧力の全振巾となり、最高および最低圧力の平均は p_w とならず第2項の分だけずれる。いいかえれば変動圧力は上下対称ではない。近似的に

$$p_s = \bar{p}_s + b \sin \theta + c \cos 2\theta \quad \dots\dots\dots(24)$$

が成立するから $\omega=0$ として (21) と (24) 式から

$$(1 + \sum_{i=1}^4 \Psi_i) A_1 \beta = b, \quad \left(\sum_{i=1}^7 \Pi_i \right) A_1 \beta = -c \quad \dots\dots\dots(25)$$

となるはずである。しかし近似計算であるので (25) 式は厳密には成立しない。そこで Φ の場合と同様、減衰の最も速い Ψ_4 と Π_7 とを補正する。

$$\Psi_4' = \frac{b}{A_1 \beta} - \sum_{i=1}^3 \Psi_i - 1 \quad \text{および} \quad \Pi_7' = -\frac{c}{A_1 \beta} - \sum_{i=1}^6 \Pi_i \quad \dots\dots\dots(26)$$

3. $n=1/2$ および 1 の場合

$n=1/2$ のときは (13) 式によつて

$$\tau_{1/2} = \frac{2p_c \sqrt{p_0 - p_c}}{p_0} q \quad \dots\dots\dots(27)$$

第1表 $\tau_{1/2}$ の 値

p_c mmAq	100	200	250	300	400
$\tau_{1/2}$ sec	0.027	0.047	0.053	0.057	0.054
N_1 c. p. m	390	222	198	186	192

τ は一次おくれ系の時定数に相当する値でデイメンションは [sec] である。 τ は装置の容量、内部絞りの径および初圧 p_0 によつて変るほか収斂圧力 p_c によつても変る。実験に使用した装置は $q = 3.37 \times 10^{-3} [m \text{ kg}^{-1/2} \text{ sec}]$ であるので p_c と τ との関係は第1表のようになる。 $\tau_{1/2}$ は $p_c = 0.667 p_0$ で極大となる。表中 N_1 と記したのは $\tau\omega=1$ となる周波数を c. p. m. であらわしたものでこのときは $\cos^2 \varphi_1 = 1/2$, $\cos^2 \varphi_2 = 1/5 \dots\dots$ となる。 $3 N_1$ サイクルすなわち $\tau\omega=3$ になると $\cos^2 \varphi_1 = 1/10$, $\cos^2 \varphi_2 = 1/37, \dots\dots$ となるので

$$\left. \begin{aligned} p_w &= p_c + \frac{(3p_0 - 4p_c)p_c^2}{2p_0} \beta^2 \cos^2 \varphi_1 \\ (p_w)_{\text{ext}} &= \pm \frac{2p_c \sqrt{p_0 - p_c}}{p_0} \beta \cos \varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(28)$$

が近似的に成立する。

$n=1$ の場合は

$$\tau_1 = \frac{2p_c \sqrt{p_0 - p_c}}{2p_0 - p_c} q \quad \dots\dots\dots(29)$$

常に $2p_0 - p_c > p_0$ であるから p_c がおなじならば $n=1$ 型のノズルの方が $n=1/2$ 型のノズルより応答性がよいことがわかる。前と同じく

第2表 τ_1 の 値

p_c mmAq	100	200	250	300	400
τ_1 sec	0.015	0.029	0.036	0.041	0.045
N_1 c. p. m	636	336	270	234	210

$q = 3.37 \times 10^{-3} [m \text{ kg}^{-1/2} \text{ sec}]$ の装置について τ を計算すると第2表のようになる。 τ は $p_c = 0.764 p_0$ で極大となる。 $\tau \omega \geq 3$ では近似的に

$$\left. \begin{aligned} p_v &= p_c + \frac{(8p_0^2 - 12p_0 p_c + 3p_c^2)p_c^3}{2(2p_0 - p_c)^3} - \beta^2 \cos^2 \varphi_1 \\ (p_w)_{\text{ext}} &= \pm \frac{2p_c^2 \sqrt{p_0 - p_c}}{2p_0 - p_c} \beta \cos \varphi_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

が成立する。

4. n が任意の値の場合

n はノズルの流量特性 Q と p^n をあらわす指数であるから一般には $1/2$ と 1 との間の任意の数値をとる。 n が任意の値であつても、一般式が適用できるので系内圧力を計算することができる。しかし実際の計算にあつて (10) の右辺の α , β および γ の係数を求めることは大変な手数がかかる。幸いなことに n による応答圧力の差は余り大きくない。そこで n の一般値に対しては $n = 1/2$ および $n = 1$ に対する計算値から比例によつて求めることができる。ここで比例定数を求めることにする。差が小さいので比例定数の誤差は2次的誤差になるのでかなりの省略を行つても差支えない。まず $\Theta_{(0)}$ を $\int_0^{2\pi} \Theta_{(0)} d\theta = 0$ となる関数として

$$p_s = \bar{p}_s + \Theta_{(0)} \dots\dots\dots (31)$$

において (4) と (11) 式とから ϵ^2 以上の項を省略すると

$$\left. \begin{aligned} q \frac{d\epsilon}{dt} &= \sqrt{p_0 - p_c} \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2(p_0 - p_c)} \right\} - \sqrt{p_0 - \bar{p}_s} \left(\frac{p_c}{\bar{p}_s} \right)^n \left(1 + n \frac{\epsilon}{p_c} \right) \\ &\quad \times \left\{ I - \frac{2n(p_0 - \bar{p}_s) + \bar{p}_s}{2\bar{p}_s(p_0 - \bar{p}_s)} \Theta \right\} \\ \text{および } I &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\Theta}{p_0 - \bar{p}_s} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\Theta}{\bar{p}_s} \right)^{-n} dt \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

定義によつて

$$\sqrt{p_0 - p_c} = \sqrt{p_0 - \bar{p}_s} \left(\frac{p_c}{\bar{p}_s} \right)^n I \dots\dots\dots (33)$$

であるから (32) 式は

$$\tau \frac{d\epsilon}{dt} + \epsilon = \left(\frac{p_c}{\bar{p}_s} \right)^{n+1} \left(\frac{p_0 - p_c}{p_0 - \bar{p}_s} \right)^{1/2} \frac{2n(p_0 - \bar{p}_s) + \bar{p}_s}{2n(p_0 - p_c) + p_c} \cdot \left(1 + n \frac{\epsilon}{p_c} \right) \Theta \dots\dots (34)$$

τ はさきに (13) 式で示したものと同一である。

\bar{p}_s と p_c とは比較的に近い値であつて

$$p_c = \bar{p}_s - \delta, \quad \left(\frac{\delta}{\bar{p}_s} \text{ および } \frac{\delta}{p_0 - \bar{p}_s} \ll 1 \right) \quad \dots\dots\dots(35)$$

とおき δ の 2 次以上を省略すれば

$$\frac{\sqrt{p_0 - p_c}}{p_c^n} = \left\{ 1 + \frac{2n(p_0 - \bar{p}_s) + \bar{p}_s - \delta}{2\bar{p}_s(p_0 - \bar{p}_s)} \right\} \frac{\sqrt{p_0 - \bar{p}_s}}{\bar{p}_s^n} \quad \dots\dots\dots(36)$$

が得られる。一方 (32) 式から、

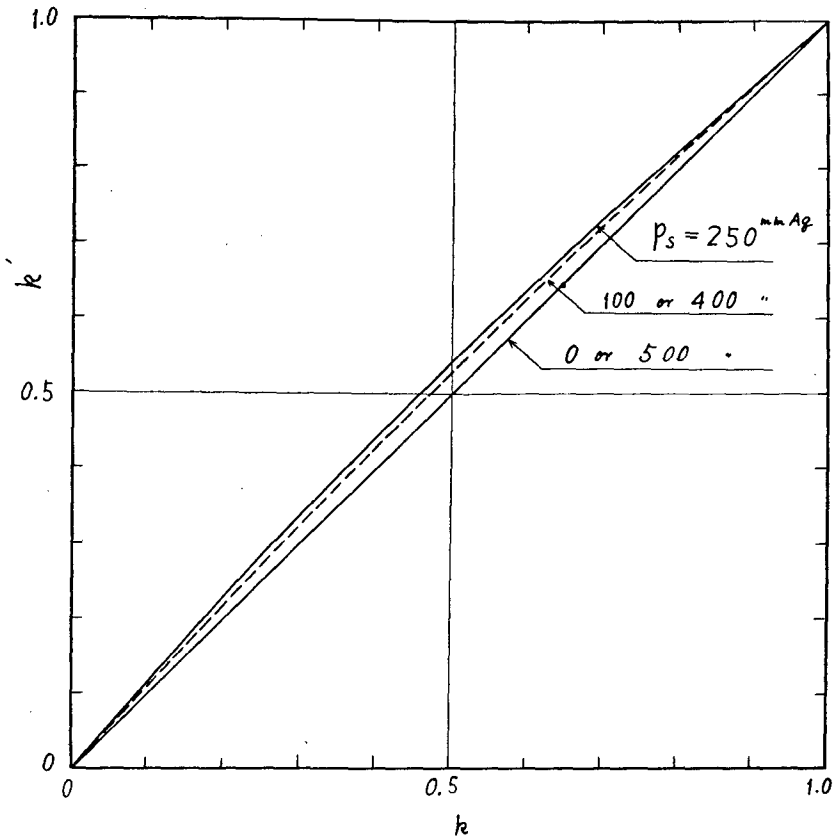
$$I = 1 + \frac{4n(n+1)(p_0 - \bar{p}_s)^2 + 4n\bar{p}_s(p_0 - \bar{p}_s) - \bar{p}_s^2}{8(p_0 - \bar{p}_s)^2 \bar{p}_s^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \Theta^2 dt$$

であるから (33) および (36) 式から

$$\delta = \frac{4n(n+1)(p_0 - \bar{p}_s)^2 + 4n\bar{p}_s(p_0 - \bar{p}_s) - \bar{p}_s^2}{4(p_0 - \bar{p}_s)\bar{p}_s\{2n(p_0 - \bar{p}_s) + \bar{p}_s\}} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \Theta^2 dt \quad \dots\dots\dots(37)$$

が得られる。この式は n の任意の値のときに p_c を求める近似式として用いることもできる。

いま $n \equiv \frac{1}{2}(1+k)$ とおくと



第 4 図

$$k' = \frac{\delta_{1/2} - \bar{\delta}}{\delta_{1/2} - \bar{\delta}_1} = \left(1 - \frac{2\bar{p}_s}{2p_0 + \bar{p}_s}\right) \left(1 + \frac{2\bar{p}_s}{p_0 + k(p_0 - \bar{p}_s)}\right) k \dots\dots\dots(38)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \delta_{1/2} + k'(\delta_1 - \delta_{1/2}) \\ \text{あるいは } p_c &= (p_c)_{1/2} - k'\{(p_c)_{1/2} - (p_c)_1\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

脚符は n の値を示す。比例定数 k' は k にひとしくなくて \bar{p}_s と k の関数となる。 \bar{p}_s をパラメータとして k と k' の関係を図示すると第4図のようになる。 p_0 は 500 mm Aq とした。 \bar{p}_s が 0 と 500 mm Aq のときは $k=k'$ で 45° の直線となる。 \bar{p}_s が 200~300 mm Aq のときの k' の値はほとんど同じである。

$k'-k$ の最大は $k=0.45$ の辺りにあつてその値は 0.045 である。それで $k \approx k'$ としたときの p_c の最大誤差 δ_{p_c} は

$$\delta_{p_c} = 0.045(\delta_1 - \delta_{1/2}) = 0.0056 \frac{2p_0 + \bar{p}_s}{\bar{p}_s(2p_0 - \bar{p}_s)} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \Theta^2 \cdot dt \dots\dots\dots(40)$$

となる。(24) 式で $b \gg c$ とすると

$$\frac{1}{T} \int_0^T \Theta^2 dt \approx b^2/2 \text{ であるから } b \text{ が小さいときは } \delta_{p_c} \text{ も小さく } k' \approx k \text{ の近似を行つても差}$$

支えない。

(35) 式を (34) 式に代入して整理し $\Theta = b \sin \omega t$ として ϵ の近似解を求めると

$$\begin{aligned} \epsilon &= \left(1 - \frac{4\delta^2}{b^2}\right)^2 \left(1 + \frac{\delta}{p_s}\right) \frac{n}{2p_s} b^2 \cos^2 \varphi_1 + \left(1 - \frac{4\delta^2}{b^2}\right) b \cos \varphi_1 \\ &\quad \times \sin(\omega t - \varphi_1) \dots\dots\dots(41) \end{aligned}$$

δ^3 以上の項を省略して ϵ の平均値を求めると

$$\epsilon_{\text{mean}} = \frac{1+k}{4p_s} \left(1 + \frac{\delta}{p_s} - 8 \frac{\delta^2}{b^2}\right) b^2 \cos^2 \varphi_1 \dots\dots\dots(42)$$

となる。 $p_v (= \bar{p}_s - \delta + \epsilon_{\text{mean}})$ の比例定数を $k'(1+\xi)$ とすると p_v は

$$p_v = (p_v)_{1/2} - k'\{(p_v)_{1/2} - (p_v)_1\} - k'\xi\{(p_v)_{1/2} - (p_v)_1\} \dots\dots\dots(43)$$

で求められる。(43) 式第3項は比例定数を k' としたときの p_v の誤差 δ_{p_v} であつて

$$\begin{aligned} \delta_{p_v} &= k'\{(p_v)_{1/2} - (p_v)_1\} \xi = k' \left\{ \left(1 + \frac{\delta_{1/2}}{p_s} - 8 \frac{\delta_{1/2}^2}{b^2}\right) (1 - k/k') \right. \\ &\quad \left. + (\delta_1 - \delta_{1/2}) \left(\frac{1}{p_s} - 16 \frac{\delta_{1/2}}{b^2} \right) (1 - k) - 8(2 - k' - kk') \frac{(\delta_1 - \delta_{1/2})^2}{b^2} \right\} \frac{b^2}{4p_s} \cos^2 \varphi_1 \\ &\quad \dots\dots\dots(44) \end{aligned}$$

となる。 δ_{p_v} は $k=0$, $k=1$ および $\tau\omega = \infty$ のときは 0 になる。 $\bar{p}_s = \frac{p_0}{2}$ および $k=0.50$ としたときの値を第3表に示すが、 b が小さく $\tau\omega$ が大きいときの誤差はほとんど問題にならない。括弧内の数字は $p_0=500$ mm Aq としたときの誤差を mm Aq で表わした数値である。

第3表 δp_v の値

b	$p_0/3$	$p_0/4$
$\tau\omega=1$	$-0.004 p_0$ (-2.0 mm Aq)	$-0.001 p_0$ (-0.5 mm Aq)
$\tau\omega=3$	$-0.0008 p_0$ (-0.4 mm Aq)	$-0.0002 p_0$ (-0.1 mm Aq)

$\cos \varphi_1$ は τ の関数であるから ω がおなじでも n の値がことなれば変つた値になるが $\tau \omega$ が小さいときは n の値による $\cos \varphi_1$ の値の変化 2~3% にすぎない。 $\tau \omega$ が大きくて \bar{p}_s が小さいと n の値による差は見逃がせないが $b (< \bar{p}_s)$ も少さく $\cos \varphi_1$ も小さくなるのでその影響は軽減される。(44) 式を導くにあたつて $\cos^2 \varphi_1$ は n の値によつて変らないものとして取扱つた。

(41) 式から変動圧の振巾 p_a を求めると

$$p_a = \left[1 - \frac{4\{\delta_{1/2} + (\delta_1 - \delta_{1/2})k'\}^2}{b^2} \right] b \cos \varphi_1 \quad \dots\dots\dots(45)$$

$$\frac{(p_a)_{1/2} - (p_a)_i}{(p_a)_{1/2} + (p_a)_i} = k' \left[1 - \frac{(1-k')(\delta_1 - \delta_{1/2})}{\delta_{1/2} + \delta_1} \right] \quad \dots\dots\dots(46)$$

比例常数を k' としたための誤差 δ_{p_s} は

$$\delta_{p_s} = -4k'(1-k') \frac{(\delta_1 - \delta_{1/2})^2}{b} \cos \varphi_1 \quad \dots\dots\dots(47)$$

δ_{p_a} の値は $\bar{p}_s = \frac{1}{2} p_0$, $k = 0.50$, $b = \frac{p_0}{3}$ および $\tau \omega = 1$ のとき 0.03 mm Aq となるので省略できる。

以上の検討の結果 p_s の振巾が大きく $\tau \omega$ が小さいときに若干の誤差が生ずるが、変動圧力および平均圧力に対する比例定数として k' を用いてよいことがわかつた。

5. n および n_e の値

ノズルの流量特性は一般につきの式であらわされる。

$$p = \lambda_1 Q + \lambda_2 Q^2 \quad \dots\dots\dots(48)$$

これより $Q \propto p^n$ の指数 n を求めると

$$n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(1 + 2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} Q \right)^{-1} \right\} \text{ or } k = \left(1 + \frac{2\lambda_2}{\lambda_1} Q \right)^{-1} \quad \dots\dots\dots(49)$$

一方 (48) 式から

$$Q = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2} p} - 1 \right)$$

であるから (49) 式から

$$k = \left(1 + 4 \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2} p \right)^{-1/2} \quad \dots\dots\dots(49)'$$

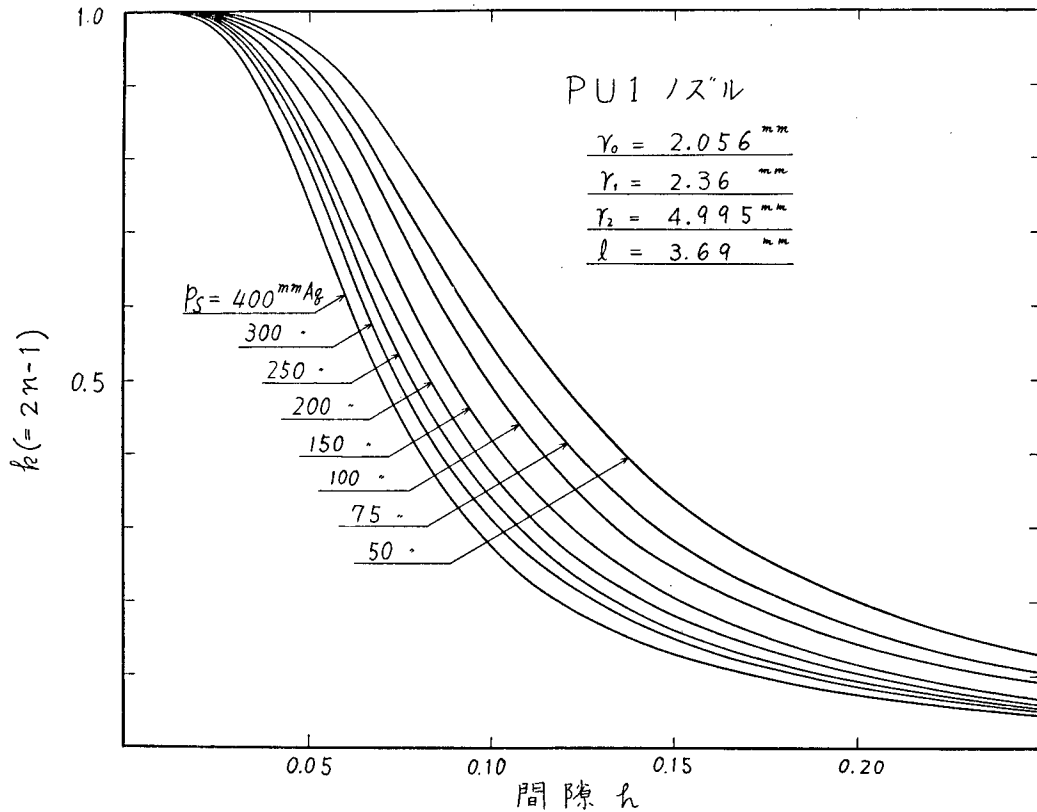
λ および λ_2 は筆者が導いた空気マイクロメータの特性式²⁾から求められる。

$$k = \left(1 + G \frac{B}{A} \frac{p}{p_0} \right)^{-1/2} \quad \dots\dots\dots(49)''$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{r_1^2 p_0}{72 \nu^2 \rho} \times 10^{-4} \\ A &= \left(\frac{r_1}{10h} \right)^3 \log e \frac{r_2}{r_1} + \frac{4}{3} \zeta_1 \left(\frac{l}{r_0} \right) \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^3 \times 10^{-3} \\ B &= \left(\frac{r_1}{10h} \right)^2 \left\{ \frac{54}{35} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 + f_{(w)} \right\} + 4 \left\{ (\zeta_2 - 1) \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^4 + 1 \right\} \times 10^{-2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(50)$$

r_0 はノズル垂直部の内半径, l はその長さ, r_1 と r_2 はノズルの内外の半径, したがって $r_1 - r_0$ が内角の丸みをあらわす。 ξ_1 と ξ_2 は係数で 1 と 1.3 である。 ρ と ν は流体の密度と動粘性係数である。 $f_{(n)}$ は, 半径流れの流体の速度分布が完成するまでに費されるエネルギーをあらわす項で広い範囲にわたって 0.130 で近似できる。 G は装置によつてきまり, A と B とは装置と h とによつてきまる。いずれも無次元量である。したがって k は装置が一定ならば h と p の関数となる。 $PU1$ ノズルについて k の値を求めると第 5 図のようになる。鏝部



第 5 図

の広いノズルでは曲線全体が上かり鏝部の狭いノズルでは $k=0$ の方にずれる。 n の値は p よりも h の影響が大きい。

1 サイクルの間では p と h につれて n の値も変動する。 h の変化が極端に大きくなければ n の一つの値でおきかえることができるだろう。この値を n の実効値 n_e と呼ぶ。 n_e を求めるにはつぎのように仮定する。 h , p および n の変化をつぎのようにおく。

$$\left. \begin{aligned} h &= h_i(1 - a' \sin \omega t) \\ p &= p_o \{1 + b' \cos \varphi_1 \sin(\omega t - \varphi_1)\} \\ n &= n_i(1 + C' \sin \omega t + d' \sin 2\omega t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

p の値は変動するが振巾は直に減衰するし p による n の変化はわずかであるので n の値を求むるときは p_e を用いてよい。 n_i は初期間隙 h_i と p_e とに対応する値である。ここで、

$$n_e = \frac{\int_0^T Q n dt}{\int_0^T Q dt}, \quad Q \sim ph \dots \dots \dots (52)$$

と仮定すると、 $a' b' c' d'$ は 1 より小さいのでおのおの 3 次以上の項を省略して

$$n_e = n_i \left(1 - \frac{a' c' - d'}{2} + \frac{b' c' \cos^2 \varphi_1}{2 - a' b' \cos^2 \varphi_1} \right) \dots \dots \dots (53)$$

(53) 式最終項は $\tau \omega$ の増加に伴つて急激に減少する項であるから p_e を求めるさいあるいは圧力振巾が小さいときは、

$$n_e \approx n_i \left(1 - \frac{a' c' - d'}{2} \right) \dots \dots \dots (53)'$$

で近似できる。 h が変動しているときの n の実効値は振動の平均位置に対する n_i は用いられてなくて (53) 式あるいは (53)' 式に示す補正項をかける必要があることがわかる。

6. 計 算 例

計算例としてつぎの条件を用いる。

第 4 表 計 算 例

$$p_s = 250 + 120 \sin \omega t \text{ (mm Aq)}$$

結果は一括して第 4 表に示す。

\bar{p}_s として 1.0 mm Aq および 5.1 mm Aq の差を生ずるがこれは Φ_3 で補正する。そのほか Ψ_4 および Π_7 で補正をする

と

$n = 1/2$ に対して

$$p_v = 234.0 + 18.5 \cos^2 \varphi_1$$

$$- 0.3 \cos^4 \varphi_1$$

$$- 2.2 \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2$$

$$(p_w)_{\text{ext}} = \pm (127.8 - 0.9 \cos^2 \varphi_1 + 7.2 \cos^2 \varphi_2 - 6.9 \cos^2 \varphi_3 - 7.2 \cos^4 \varphi_1) \cos \varphi_1$$

$$- (3.8 \cos^2 \varphi_1 - 6.9 \cos^2 \varphi_2 + 2.7 \cos^2 \varphi_3 - 1.6 \cos^2 \varphi_4 - 3.7 \cos^4 \varphi_1$$

$$+ 1.4 \cos^4 \varphi_2 + 4.3 \cos^4 \varphi_4)$$

また $n = 1$ に対しては、

$$p_v = 221.3 + 32.2 \cos^2 \varphi_1 - 0.3 \cos^4 \varphi_1 - 3.2 \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2$$

$$(p_w)_{\text{ext}} = \pm (123.0 + 0.2 \cos^2 \varphi_1 + 21.5 \cos^2 \varphi_2 - 21.9 \cos^2 \varphi_3 - 2.8 \cos^4 \varphi_1) \cos \varphi_1$$

$$- (3.6 \cos^2 \varphi_1 - 6.5 \cos^2 \varphi_2 + 18.1 \cos^2 \varphi_3 - 18.6 \cos^2 \varphi_4 - 27.1 \cos^4 \varphi_1$$

$$+ 16.8 \cos^4 \varphi_2 + 13.7 \cos^4 \varphi_4)$$

をうる。第6図は $Nc. p. m.$ に対してこれらの圧力を計算した結果である。 $n=1$ の場合、 $\omega=0$ 附近で最高圧力に極大があらわれているがこれは 11_7 の補正 (+8.2) が大きかつたためではないかと考える。

$N \geq 600 c. p. m.$ では変動が上下対象に近くなつており近似的に

$$\begin{aligned} p_{1/2} &= 234.0 + 14.7 \cos^2 \varphi_1 \\ &\quad + 127.7 \cos \varphi_1 \sin(\omega t - \varphi_1) \\ p_1 &= 221.3 + 28.6 \cos^2 \varphi_1 \\ &\quad + 27.1 \cos^4 \varphi_1 \\ &\quad + 123.9 \cos \varphi_1 \sin(\omega t - \varphi_1) \end{aligned}$$

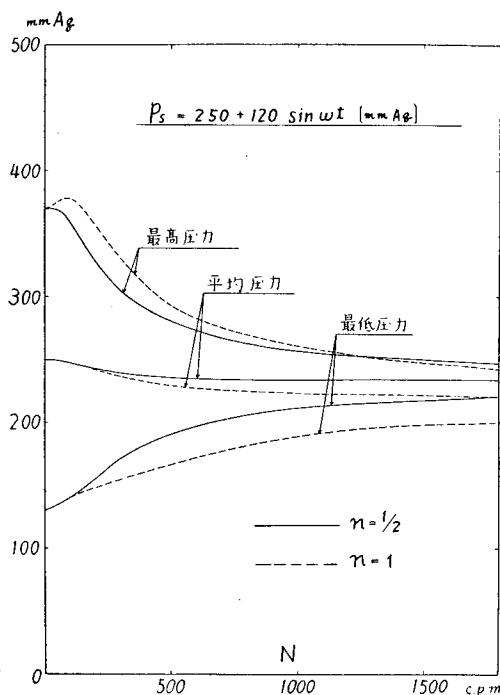
であらわされる。

7. 結 論

本報では単独ノズルの空気マイクロメータの測定ノズルの間隙が振動したとき系内の圧力がどのような変動をするかを理論的に扱った。従来空気マイクロメータの動特性は一次おくれ系とみなして取扱い、その応答性を時定数で代表させていた。³⁾ 本報の取扱いは実際の装置に即応させて非線型としての解を求めた。この場合時定数に相当する値は τ である。装置がきまつても τ は定数とならず圧力 p_c によつて変ることが明にされた。金野氏は空気マイクロメータの動特性についての論文⁴⁾の中で応答性は圧力のひくいほどよくなることを言及された。このことは第1表および第2表に示すように τ_{\max} となる圧力以下では筆者の結果と一致する。同氏の実験はこの圧力以下で行われている。

ここで導かれた式は上に述べた仮説によつて明なように ω の小さいところ、とくに0附近では十分の近似が期待できない。 $\omega \neq 0$ 附近だけの状態を調べるには別の計算方法を用いるべきである。この研究の目的は整流特性を明にすることで、 $\tau\omega$ が大きい場合の圧力状態が重要である。そのため V_c のとくに大きな装置が対象となるので計算例はその趣旨にそつて行われた。この計算方法の可否は実験によつて確める必要がある。その結果については後報にゆずる。

この一連の研究の初期において国内留学のため東京工業大学に出張を命ぜられた。その間多くの有益なる御助言を載いた同学谷口修教授ならびに精密機械研究所の方々に厚く御礼を申上げる。また本研究の一部は文部省科学研究費の助成をうけたことをつけ加える。



第6図

参 考 文 献

- 1) 筆者「空気マイクロメータによる振動測定」計測 Vol. 3 (1953), No. 5, p. 222.
- 2) 筆者「空気マイクロメータの整流特性について」1959年4月日本機械学会, 第36期, 通常総会学術講演会前刷.
- 3) たとえば, 米持政忠「高圧式空気マイクロメータの動特性」精密機械, Vol. 19 (1953), No. 10, p. 357.
- 4) 金野仁「試作電気容量式空気マイクロメータについて」精密機械, Vol. 19, (1953), No. 11, p. 399.